Le but du problème est d'étudier, de deux façons différentes, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)d\theta$.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

PARTIE I

1. a) Montrer que $\int_0^{\pi} \ln(2 - 2\cos\theta)\, d\theta$ et $\int_0^{\pi} \ln(2 + 2\cos\theta)\, d\theta$ sont deux intégrales convergentes.

   b) En déduire que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrer que : $\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[\quad F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) = 2\pi \ln|x|$.

   b) On pose : $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$ et : $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$.

   Montrer que I et J convergent et sont égales. Calculer I (on pourra considérer I+J).

   c) Montrer que : $F(1) = F(-1) = 0$.

3. a) Montrer que F est continue sur $]-1,1[$.

   b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad F'(x) = \int_0^{\pi} \frac{2(x - \cos\theta)}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\, d\theta.$$

4. Pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, calculer $\int_0^{\pi} \frac{x - \cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\, d\theta$. En déduire la valeur de F(x) pour $x \in]-1,1[$.

5. Tracer la courbe représentative de F sur $\mathbb{R}$.

PARTIE II

On se propose de calculer F(x) pour $x \in]-1,1[$, indépendamment de la partie I, en utilisant la théorie des séries.

1. Dans cette question x est un réel fixé de $]-1,1[$.

   Pour n élément de $\mathbb{N}^*$ on considère la fonction u_n définie sur $[0,\pi]$ par : $u_n(\theta) = \dfrac{x^n \cos n\theta}{n}$.

   a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0,\pi]$.

   On pose : $S(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\theta)$, pour tout $\theta \in [0,\pi]$.

   b) Montrer que S est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

   c) Etablir que la série de terme général : $v_n(\theta) = x^n e^{in\theta}$ $(n \geq 1)$ converge pour $\theta \in [0,\pi]$ et admet pour somme : $T(\theta) = \dfrac{x\, e^{i\theta}}{1 - x e^{i\theta}}$.

   d) En déduire que : $\forall \theta \in [0,\pi] \quad S'(\theta) = \dfrac{-x \sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

2. a) Déduire de la question précédente que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall \theta \in [0,\pi],\ \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos n\theta}{n}.$$

   b) Retrouver la valeur de F(x) pour $x \in]-1,1[$.

3. On souhaite, pour finir, montrer que :

$$\forall x \in [-1,1],\ \forall \theta \in]0,\pi[,\ \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos n\theta}{n}.$$

   (Cette égalité a été montrée pour $|x| < 1$ à la question II.2.a), on se propose de l'étendre à $x = \pm 1$).

a) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \left|1 - xe^{i\theta}\right| \geq 1 - \cos\theta$$

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\quad \left|1 - xe^{i\theta}\right| \geq 1.$$

En déduire que, pour $\theta \in]0, \pi[$: $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n e^{i(n+1)\theta}}{1 - xe^{i\theta}} dx = 0.$

b) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall \theta \in]0, \pi[\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k\theta}{k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \cos k\theta \right) dx$, puis que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos k\theta}{k}$ converge pour tout θ de $]0, \pi[$ et que sa somme est la partie réelle de $\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} dx.$

c) En déduire alors le résultat demandé.